

# EQUACIONAMENTO E MODELAGEM DA BOBINA BIFILAR DE TESLA

Caio Marcelo de Miranda<sup>1</sup>, Sérgio Francisco Pichorim<sup>2</sup>

## RESUMO

A Biotelemetria apresenta-se como uma importante técnica que possui várias aplicações na área de Biomedicina e outras. A dimensão da unidade remota ou sensora constitui um grande desafio dentro desta área, sendo que na maioria dos casos, deseja-se uma unidade o menor possível. Desta maneira, sensores passivos são interessantes, pois possibilitam uma menor dimensão do dispositivo e não necessitam de uma fonte própria de energia, ou bateria, que pode causar danos ao indivíduo monitorado caso ocorra vazamento do seu conteúdo químico. Deste modo, o sensor indutivo autorressonante apresenta-se como uma boa solução, uma vez que este pode ser construído com apenas um componente, neste caso um indutor. Por apresentar pequenas dimensões, este tipo de sensor possui uma baixa capacitância parasita, o que torna a sua frequência de ressonância bastante alta. Neste caso, a bobina bifilar idealizada por Nikola Tesla pode constituir-se de uma solução, uma vez que a idéia de Tesla era de aumentar a capacitância intrínseca de suas bobinas. Portanto, um entendimento físico e devido equacionamento da bobina bifilar se faz necessário, uma vez que, até onde se sabe, este tipo de abordagem não existe na literatura. A partir de uma análise das tensões entre espiras adjacentes, foi desenvolvido neste trabalho um equacionamento da bobina bifilar de Tesla, possibilitando a determinação do aumento da capacitância interna e, conseqüente, redução na frequência de ressonância desta bobina. Um modelo elétrico equivalente da bobina foi também elaborado através desta análise. Isto possibilita o projeto de bobinas bifilares e predição dos parâmetros capacitância e frequência de autorressonância desta bobina. Testes foram realizados ao comparar a frequência de autorressonância calculada e medida para diversos números de espiras, comprovando a validade do modelo e das equações desenvolvidas.

**Palavras-chave:** Biotelemetria passiva; bobina bifilar; capacitância parasita em bobinas; autorressonância.

## ABSTRACT

The biotelemetry is an important technique with many applications in biomedical engineering and other areas. The size of the remote unit or sensor is a major challenge within this area, and, in most cases, a sensor is desired to be designed as small as possible. Thus, passive sensors are interesting because they allow a smaller dimensions and do not require a power source or battery, which can harm a patient in the event of leakage of its chemical content. Thus, the self-resonant inductive sensor is a good solution since it can be built with only one component. Due to its small size, this type of sensor has a low stray capacitance, which makes its self-resonance frequency very high. In this case, the bifilar coil, devised by Nikola Tesla, can be a solution, since Tesla's idea was to increase the intrinsic capacitance of his coils. Therefore a physical understanding of the bifilar coil is necessary, since as far as is known, this approach does not exist in the literature. From an analysis of the voltage between adjacent turns, equations of the Tesla's bifilar coil were developed, allowing the prediction of the increase on the internal capacitance and consequent reduction of the resonance frequency. An equivalent electric model was also developed from this analysis. This allowed the project of bifilar coils and the calculation of the internal capacitance and self-resonance frequency of this coils. Tests were realized in order to compare the calculated and measured self-resonance for various numbers of turns, showing the validity of the presented method.

**Keywords:** biotelemetry; bifilar coil; stray capacitance in coils; self-resonance

1. Mestrando em Engenharia Elétrica e Informática Industrial. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. E-mail: [kaiomiranda@hotmail.com](mailto:kaiomiranda@hotmail.com)

2. Doutor em Engenharia Elétrica e Informática Industrial. Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

## INTRODUÇÃO

A biotelemetria consiste no estudo e na monitoração de parâmetros fisiológicos de homens e animais a distância, de maneira a causar a menor interferência possível na atividade ou rotina observada. Dentro do campo da biotelemetria encontram-se as mais variadas técnicas de comunicação, porém a técnica de comunicação passiva possui uma grande área de aplicação por não precisar de fonte própria de alimentação acoplada ao sensor, o que possibilita uma menor dimensão da unidade sensora e não depende da utilização de uma bateria, que limita a vida útil do sensor e pode causar danos a um paciente caso ocorra vazamento do conteúdo químico desta<sup>1</sup>. Sistemas de identificação eletrônica, como crachás, “tags” ou mesmo cartões eletrônicos em transporte público, são exemplos de telemetria passiva de uso diário.

Grandezas como pressão, posição, deslocamento linear e angular são comumente medidas com este tipo de sensor, sendo que destes valores podem-se extrair outros parâmetros, tais como, força, deslocamento, pressão ou elasticidade. Por exemplo, Carter Collins<sup>2</sup> propôs um método para medir a pressão intra-ocular do olho de animais utilizando um transdutor indutivo, onde a pressão entre dois enrolamentos na unidade sensora é variada de acordo com a pressão no interior do globo ocular, variando assim a frequência de ressonância do conjunto. Maeoka *et al.*<sup>3</sup> desenvolveu um sensor biotelemétrico passivo para o monitoramento da pressão arterial, o sensor foi desenvolvido usando um tubo de vidro fechado em um lado, sendo o outro, coberto por uma fina membrana com um núcleo de ferrite ligado a esta, o deslocamento relativo do núcleo de ferrite, modula a frequência de ressonância de um circuito LC localizado no tubo e a variação na frequência pode ser monitorada externamente.

Um importante tipo de sensor utilizado na Biotelemetria passiva é o sensor indutivo autorressonante. O princípio de operação deste sensor é utilizar a autorressonância do indutor, não sendo necessário, por exemplo, a adição de um capacitor em paralelo para se obter a ressonância do sistema. Desta maneira, este tipo de sensor apresenta uma pequena dimensão, pois pode consistir de apenas um componente<sup>4</sup>. A capacitância que possibilita a ressonância do sistema é a própria capacitância parasita ou interna da bobina. Como a capacitância parasita em um

pequeno sensor biotelemétrico é geralmente muito baixa, a frequência de ressonância do sistema acaba sendo muito elevada, o que pode causar alguns problemas, por exemplo: dificultar a aquisição dos dados dependendo do sistema de leitura utilizado; levar a necessidade de análises através de um modelo distribuído onde equações pré-estabelecidas para o cálculo de indutância e capacitância não são válidas<sup>5</sup>; possibilitar a interferência de faixas de frequência do espectro eletromagnético comercial; e, no caso de sensores indutivos implantáveis, frequências abaixo de 50 MHz devem ser utilizadas de modo a minimizar a atenuação do sinal dentro do corpo humano<sup>6</sup>.

A bobina Bifilar é uma configuração idealizada e patenteada por Nikola Tesla que possui um diferente arranjo das suas espiras. O objetivo de Tesla era o de anular a auto-indutância de bobinas e para isto ele desenvolveu uma maneira especial de enrolar as suas espiras de tal forma que a capacitância parasita fosse aumentada. Com este aumento na capacitância parasita a bobina pode operar como uma resistência pura na sua frequência de ressonância. Uma singularidade resultante desta configuração foi que com o aumento na capacitância da bobina obteve-se uma diminuição na frequência de autoressonância<sup>7</sup>. Ou seja, pode-se utilizar a bobina bifilar de Tesla, para se construir um sensor passivo em telemetria com dimensões mais reduzidas, já que o componente capacitor pode ser substituído pela alta capacitância interna da bobina. Sabe-se que existem outros métodos de se maximizar a capacitância parasita de bobinas, como por exemplo, o uso de núcleos de ferrite e de enrolamentos multicamadas, porém estes possuem algumas desvantagens. No caso do uso de um núcleo de material ferromagnético, este introduz fatores não lineares a função de transferência do sensor, os quais dependem da temperatura, frequência, densidade de fluxo, etc<sup>8</sup>, além de alterar também a indutância do sensor, adicionando mais uma incógnita ao sistema. Ao utilizar um enrolamento multicamadas, a dimensão física máxima do sensor, dependendo da aplicação, pode ser um problema.

A bobina bifilar de Tesla, patenteada em 1894, se caracteriza por apresentar um arranjo especial das suas espiras. A idéia de Tesla foi a de enrolar simultaneamente dois condutores A e B, devidamente isolados. Ao final do processo, faz-se um curto circuito entre o final de A e o começo de B, conforme pode ser visto na Figura 1a.

Segundo Tesla, comparando duas bobinas, uma convencional e outra do tipo bifilar, ambas com 1000 espiras, ao aplicar 100 V em cada uma, existirá uma tensão entre espiras de 0,1 V e 50 V nas bobinas convencional e bifilar respectivamente. Portanto, como justificado por Tesla, a energia armazenada na bobina é dada em função do quadrado das tensões entre espiras<sup>9</sup>, ou seja,  $50^2/0,1^2 = 250.000$ , portanto para este caso a bobina bifilar armazena uma energia 250.000 vezes maior do que a bobina normal, porém, em sua patente Tesla não cita como ocorre o aumento da capacitância na bobina bifilar e nem como determinar este aumento.

O objetivo deste estudo é apresentar o equacionamento e o modelo elétrico de bobinas bifilares, bem como comprovar esta análise com resultados práticos.

## MATERIAIS E MÉTODOS

### Descrição física

Considerando que as bobinas normal e bifilar, estudadas nesta análise, sejam ambas de mesma geometria, ou seja, que possuam as mesmas dimensões físicas além dos mesmos condutores e número de espiras iguais, e que, o mesmo potencial (V) seja aplicado para as duas configurações, podemos fazer algumas considerações. A Figura 1 exemplifica uma bobina normal e na configuração bifilar com a mesma geometria.

Como a geometria é igual, a capacitância entre espiras  $C_{tt}$  e a indutância total  $L_s$  de ambas as bobinas são iguais. A energia total da bobina, vista dos terminais x e y na Figura 1, é dada por,

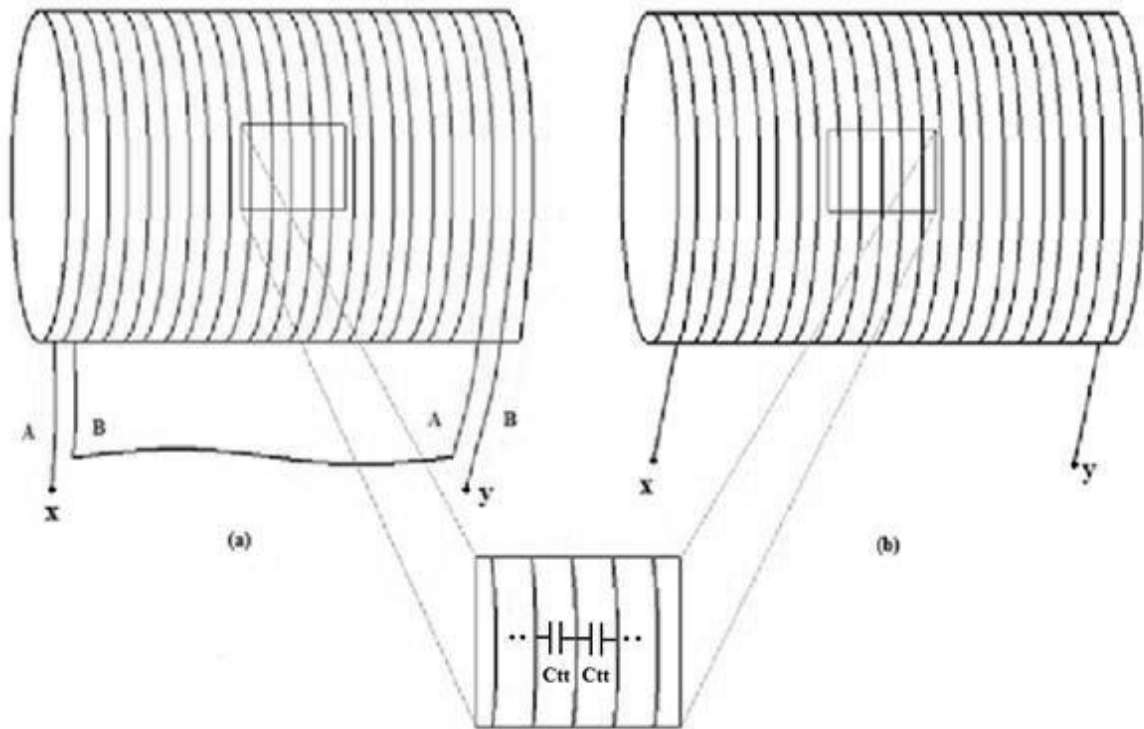
$$U = \frac{1}{2} C_s V^2 = (N - 1) \cdot U_{tt}, \quad (1)$$

onde  $C_s$  é a capacitância equivalente (parasita) da bobina e o termo  $(N - 1)$  está relacionado ao número de parcelas das energias entre espiras ( $U_{tt}$ ). Sendo  $V_{tt}$  a tensão entre espiras adjacentes, a energia entre espiras adjacentes  $U_{tt}$  é dada por,

$$U_{tt} = \frac{1}{2} C_{tt} V_{tt}^2. \quad (2)$$

Portanto tem-se que,

$$C_{tt} = \frac{2U_{ttb}}{V_{ttb}^2} = \frac{2U_{ttn}}{V_{ttn}^2} \quad (3)$$



**Figura 1.** Exemplo de duas bobinas com a mesma geometria, ou seja, com as mesmas dimensões, número de espiras  $N$ , espaçamento entre espiras e portanto mesma indutância, capacitância entre espiras e resistência. (a) Bobina na configuração bifilar. (b) Bobina no formato solenóide helicoidal.

sendo  $U_{ttb}$  e  $U_{ttn}$  a energia entre espiras das bobinas bifilar e normal,  $V_{ttb}$  e  $V_{ttn}$ , a tensão entre espiras das bobinas bifilar e normal, respectivamente. A partir da equação (3) obtém-se,

$$\left(\frac{V_{ttb}}{V_{ttn}}\right)^2 = \frac{U_{ttb}}{U_{ttn}} = \frac{U_b/(N-1)}{U_n/(N-1)} = \frac{U_b}{U_n}, \quad (4)$$

onde  $U_b$  e  $U_n$  são a energia total das bobinas bifilar e normal. Utilizando  $C_{sb}$  e  $C_{sn}$  como a capacitância total de uma bobina bifilar e normal e a partir das equações (1) e (4), tem-se que

$$\left(\frac{V_{ttb}}{V_{ttn}}\right)^2 = \frac{\frac{1}{2}C_{sb}V^2}{\frac{1}{2}C_{sn}V^2} = \frac{C_{sb}}{C_{sn}}. \quad (5)$$

Desta maneira tem-se que,

$$C_{sb} = C_{sn} \left(\frac{V_{ttb}}{V_{ttn}}\right)^2, \quad (6)$$

ou seja, o aumento da capacitância total é uma relação quadrática do aumento de tensão entre as espiras adjacentes.

### Abordagem simplificada

Uma maneira simplificada para abordar a razão das tensões entre espiras de uma bobina bifilar e normal, conforme fez Tesla, é considerar que a tensão entre espiras de uma bobina bifilar, independente se esta possui número de espiras par ou ímpar, vale metade da tensão aplicada entre seus terminais, ou seja:

$$V_{ttb} = \frac{V}{2}, \quad (7)$$

sendo a tensão média entre espiras de um solenóide simples dada por,

$$V_{ttn} = \frac{V}{N}, \quad (8)$$

a partir destas considerações tem-se que:

$$\frac{V_{ttb}}{V_{ttn}} = \frac{V/2}{V/N} = \frac{N}{2}. \quad (9)$$

A capacitância total de um solenóide camada simples é dada pela associação série de todas as capacitâncias entre espiras<sup>10</sup>, ou seja:

$$C_{sn} = \frac{C_{tt}}{N-1}. \quad (10)$$

Substituindo a equação (9) e (10) em (6), chega-se a:

$$C_{sb} = C_{sn} \left(\frac{N}{2}\right)^2 = \frac{C_{tt}}{N-1} \frac{N^2}{4}. \quad (11)$$

Destaca-se a simplicidade desta equação e o fato de ser possível determinar a capacitância de uma bobina apenas em função do número de espiras e de  $C_{tt}$ .

### **Análise em função da tensão média entre espiras**

O efeito do aumento da tensão entre espiras que ocorre na bobina bifilar, pode ser observado em uma configuração "solenóide expandida", conforme a Figura 2a. Nota-se que ao aplicar 16 V, por exemplo, em uma bobina bifilar com 8 espiras tem-se 2 V por espira e ao fazer a medição da tensão no centro de cada espira têm-se os valores mostrados na Figura 2a. Porém o efeito mais interessante, é de que entre a espira 2 e sua adjacente, a 1, tem-se 8 V e que entre a 2 e 3 tem-se 6 V e assim por diante, conforme mostra a Figura 2b. A diferença para uma bobina com um número de espiras ímpar, é que neste caso existe um número par de tensões entre espiras.

Para uma bobina com número par de espiras, têm-se  $N/2$  tensões entre espiras com a tensão maior (8 V, no exemplo, ou  $V/2$ ) e  $N/2 - 1$  tensões entre espiras com o valor menor (6V, no exemplo, ou  $V/N.(N/2 - 1)$ ), desta maneira tem-se:

$$V_{ttb} = \frac{\left(\frac{N}{2}\right)\left(\frac{V}{2}\right) + \left(\frac{N}{2} - 1\right)\frac{V}{N}\left(\frac{N}{2} - 1\right)}{N - 1}. \quad (12)$$

Para um número ímpar de espiras têm-se metade das tensões entre espiras com o valor maior e metade com o valor menor, ou seja:

$$V_{ttb} = \frac{\left(\frac{N-1}{2}\right)\frac{V}{N}\left(\frac{N+1}{2}\right) + \left(\frac{N-1}{2}\right)\frac{V}{N}\left(\frac{N-1}{2}\right)}{N - 1}. \quad (13)$$

Resolvendo algebricamente as equações (12) e (13) chegam-se as seguintes expressões para a tensão média entre espiras para uma bobina bifilar com número

de espiras par e ímpar, respectivamente:

$$V_{ttb} = \left(\frac{V}{N-1}\right) \left(\frac{N}{2} - 1 + \frac{1}{N}\right) \quad (14)$$

e

$$V_{ttb} = \frac{V}{2} . \quad (15)$$

Pode-se equacionar a razão entre a tensão média entre espiras de uma bobina simples e na configuração bifilar. Ao aplicar a mesma tensão ( $V$ ) em ambas as bobinas, resolvendo algebricamente as equações, chegam-se as seguintes expressões para  $N$  par e ímpar respectivamente:

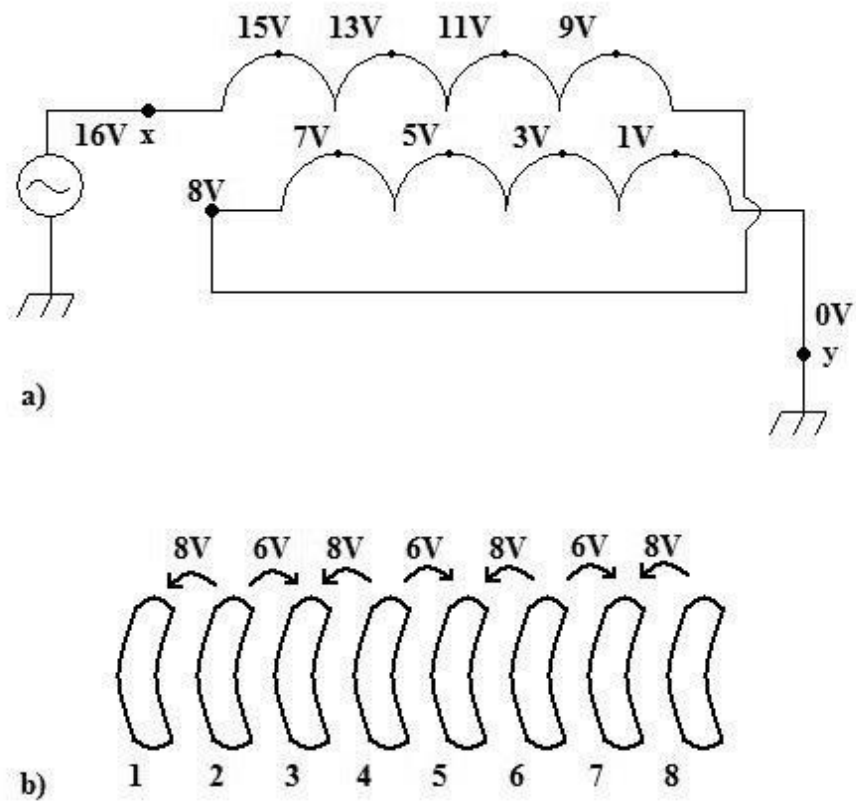
$$\frac{V_{ttb}}{V_{ttn}} = \frac{\left(\frac{V}{N-1}\right) \left(\frac{N}{2} - 1 + \frac{1}{N}\right)}{V/N} = \left(\frac{N-1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2(N-1)}\right) \quad (16)$$

e

$$\frac{V_{ttb}}{V_{ttn}} = \frac{V/2}{V/N} = \frac{N}{2} . \quad (17)$$

Portanto, pode-se relacionar as equações (16) e (17) com (6) para se obter as expressões da capacitância parasita de uma bobina bifilar, que depende apenas de  $C_{tt}$  e  $N$ . Para uma bobina com  $N$  par e ímpar as seguintes expressões são definidas respectivamente:





**Figura 2.** a) Efeito da magnificação da tensão entre espiras em uma bobina bifilar de 8 espiras. b) Representação da bobina bifilar de (a) como um solenóide comum, porém indicando a diferença de potencial entre espiras.

$$C_{sb} = \frac{C_{tt}}{N-1} \cdot \left[ \left( \frac{N-1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2(N-1)} \right) \right]^2 \quad (18)$$

e

$$C_{sb} = C_{sn} \left( \frac{N}{2} \right)^2 = \frac{C_{tt}}{N-1} \frac{N^2}{4} \quad (19)$$

### Análise através do somatório da energia entre espiras

É possível equacionar a capacitância total de uma bobina bifilar de uma maneira mais exata, ao considerar o somatório das energias armazenadas entre espiras. Desta maneira, através de (1), tem-se que a capacitância parasita de uma

bobina bifilar vale:

$$C_{sb} = \frac{2U_b}{V^2} = \frac{2}{V^2} \sum U_{ttb}. \quad (20)$$

Sendo a capacitância total de uma bobina normal dada por:

$$C_{sn} = \frac{2U_n}{V^2} = \frac{2(N-1)U_{ttn}}{V^2}, \quad (21)$$

chega-se a seguinte expressão para a razão entre as capacitâncias:

$$\frac{C_{sb}}{C_{sn}} = \frac{1}{N-1} \sum \left( \frac{V_{ttb}}{V_{ttn}} \right)^2. \quad (22)$$

Para uma bobina com número de espiras par (conforme Figura 2b) têm-se  $N/2$  tensões entre espiras com a tensão maior (8 V, no exemplo ou  $V/2$ ) e  $N/2-1$  tensões entre espiras com a tensão menor (6 V, no exemplo ou  $V_c$ ), assim, a equação (22) pode ser escrita como:

$$\frac{C_{sb}}{C_{sn}} = \frac{1}{N-1} \left[ \frac{N}{2} \left( \frac{V/2}{V/N} \right)^2 + \left( \frac{N}{2} - 1 \right) \left( \frac{V_c}{V/N} \right)^2 \right] \quad (23)$$

onde,

$$V_c = \frac{V}{N} \left( \frac{N}{2} - 1 \right).$$

Resolvendo algebricamente a equação (23) chega-se, para  $N$  par:

$$\frac{C_{sb}}{C_{sn}} = \frac{N^2 - 2N}{4} + 1. \quad (24)$$

Para uma bobina com número de espiras ímpar tem-se metade das tensões entre espiras com o valor maior ( $V_a$ ) e metade com o valor menor ( $V_b$ ), portanto:

$$\frac{C_{sb}}{C_{sn}} = \frac{1}{N-1} \left[ \frac{N-1}{2} \left( \frac{V_a}{V/N} \right)^2 + \frac{N-1}{2} \left( \frac{V_b}{V/N} \right)^2 \right] \quad (25)$$

onde,

$$V_a = \frac{V}{N} \left( \frac{N+1}{2} \right)$$

e

$$V_b = \frac{V}{N} \left( \frac{N-1}{2} \right).$$

Resolvendo algebricamente a equação (25) obtém-se a expressão para a razão entre a capacitância total de uma bobina bifilar e solenóide comum com um número de espiras ímpar:

$$\frac{C_{sb}}{C_{sn}} = \frac{N^2 + 1}{4}. \quad (26)$$

### Determinação da redução na frequência de ressonância

A frequência de ressonância de uma bobina autorressonante, com capacitância interna  $C_s$  e indutância total  $L_s$  é dada por:

$$f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_s C_s}} \quad (27)$$

Pode-se determinar a redução  $r$  da frequência de ressonância de uma bobina bifilar em relação a uma bobina normal (com a mesma geometria e número de espiras e portanto mesma indutância  $L_s$ ) através de:

$$r = \frac{f_{on}}{f_{ob}} = \frac{2\pi\sqrt{L_s C_{sb}}}{2\pi\sqrt{L_s C_{sn}}} = \sqrt{\frac{C_{sb}}{C_{sn}}}. \quad (28)$$

Substituindo a equação (6) na equação (28) chega-se que a redução em frequência é dada por:

$$r = \frac{f_{on}}{f_{ob}} = \sqrt{\frac{C_{sb}}{C_{sn}}} = \frac{V_{ttb}}{V_{ttn}}. \quad (29)$$

Ou seja, a redução na frequência de ressonância é diretamente proporcional ao aumento da tensão entre as espiras.

### Abordagem simplificada

Através da abordagem simplificada para a diferença de tensão entre espiras de uma bobina bifilar dada por (7) e a mesma abordagem para uma bobina normal dada pela equação (8), ao substituir ambas em (29) chega-se a redução da frequência de ressonância de:

$$r = \frac{N}{2}. \quad (30)$$

### Média das tensões entre espiras

A abordagem da tensão média entre espiras também pode ser utilizada para avaliar a redução na frequência de ressonância. Para o caso de um  $N$  par dado por (18), substituindo em (29) tem-se:

$$r = \frac{1}{2} \left[ N - 1 + \left( \frac{1}{N - 1} \right) \right]. \quad (31)$$

De maneira análoga, fazendo a substituição de (19) em (29) para um  $N$  ímpar, e obtém-se uma equação igual à equação (30).

### Somatório da energia entre espiras

Utilizando a análise do somatório da energia entre espiras, substitui-se (24) em (29) para um  $N$  par, que resulta em:

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{N^2 - 2N + 4}, \quad (32)$$

e, substituindo (26) em (29) para um número ímpar de espiras, resultando em:

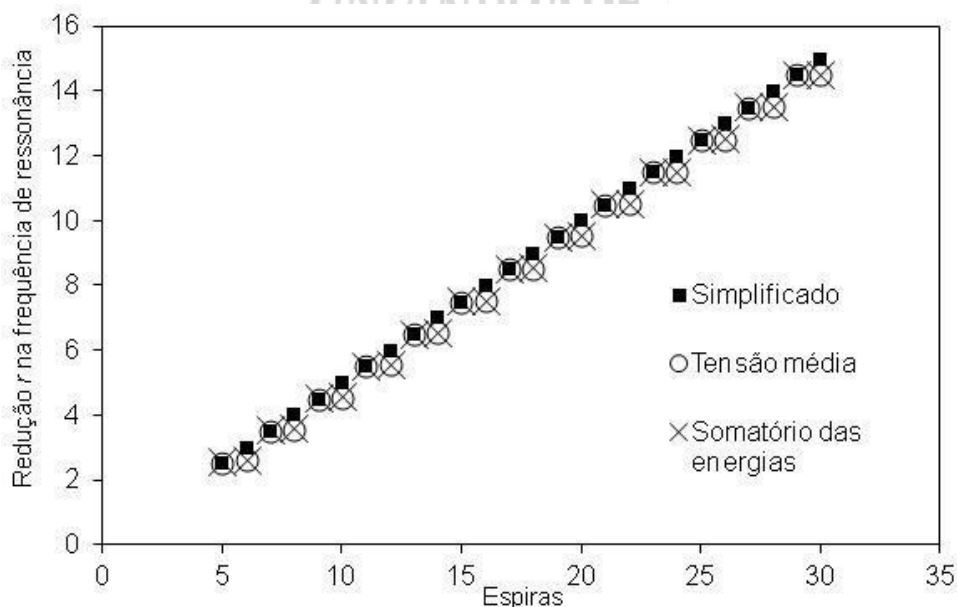
$$r = \frac{1}{2} \sqrt{N^2 + 1}. \quad (33)$$

Observa-se que para bobinas com elevado número de espiras, todos os modelos anteriores, equações (30) a (33), tendem para a abordagem simplificada, ou seja, para  $r \cong N/2$ .

### Comparação entre os modelos adotados

A Figura 3 apresenta um gráfico comparativo para a redução de frequência via os três modelos acima apresentados: simplificado (quadrados), média das tensões entre espiras (círculos) e o somatório das energias entre espiras (X), que é o modelo mais exato.

A média do erro absoluto do modelo simplificado em relação ao modelo do somatório de energia foi de 2,60% (desvio padrão de 3,76% e correlação de 0,9981). Este erro é menor quando  $N$  aumenta, ficando 2,20% para  $N$  maior que 20. Já a média do erro absoluto do modelo de tensão média em relação ao somatório de energia foi de apenas 0,17% (desvio padrão de 0,5% e correlação de 0,9999). A análise destes resultados permite observar, que a adoção do modelo simplificado pode ser feita, apesar de ele ter maiores erros. Isto por que, este modelo é bastante simples e não infere em erros significativos no modelo e no projeto de bobinas bifilares.



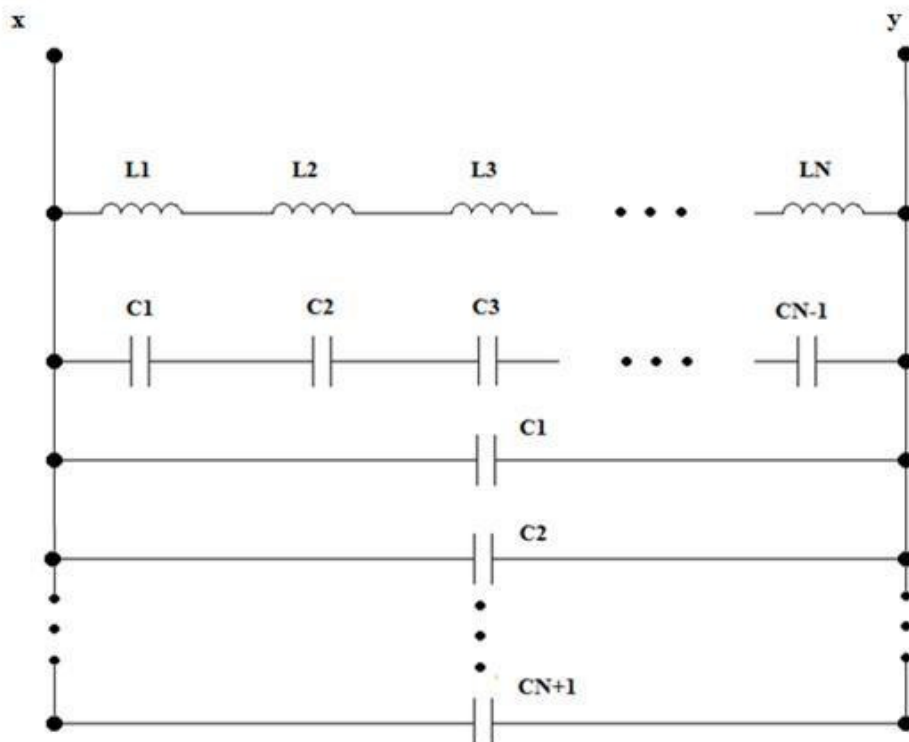
**Figura 3.** Comparação entre os três modelos apresentados de acordo com a redução em frequência.

## Modelo Simplificado

A abordagem simplificada vista na seção 2.2 forneceu uma fórmula para a capacitância parasita de uma bobina bifilar dada por (11), manipulando algebricamente esta equação chega-se a:

$$C_{sb} = \frac{C_{tt}}{4} \left[ (N + 1) + \left( \frac{1}{N - 1} \right) \right]. \quad (34)$$

A análise da equação (34) pode levar a um modelo elétrico simplificado da bobina bifilar. Onde existem  $N+1$  capacitores (com o valor de  $C_{tt}/4$ ) em paralelo entre si e em paralelo com  $N-1$  capacitores (valendo  $C_{tt}/4$ ) em série entre si, sendo todo este conjunto de capacitores em paralelo com  $N$  indutores em série representando a indutância  $L_{tt}$  de cada espira, sendo  $L_{tt} = L_s/N$ . A Figura 4 mostra este modelo.



**Figura 4.** Modelo elétrico total de uma bobina bifilar desenvolvido a partir do modelo simplificado. Todos os  $L$  valem  $L_{tt}$  e todos os  $C$  valem  $C_{tt}/4$ .

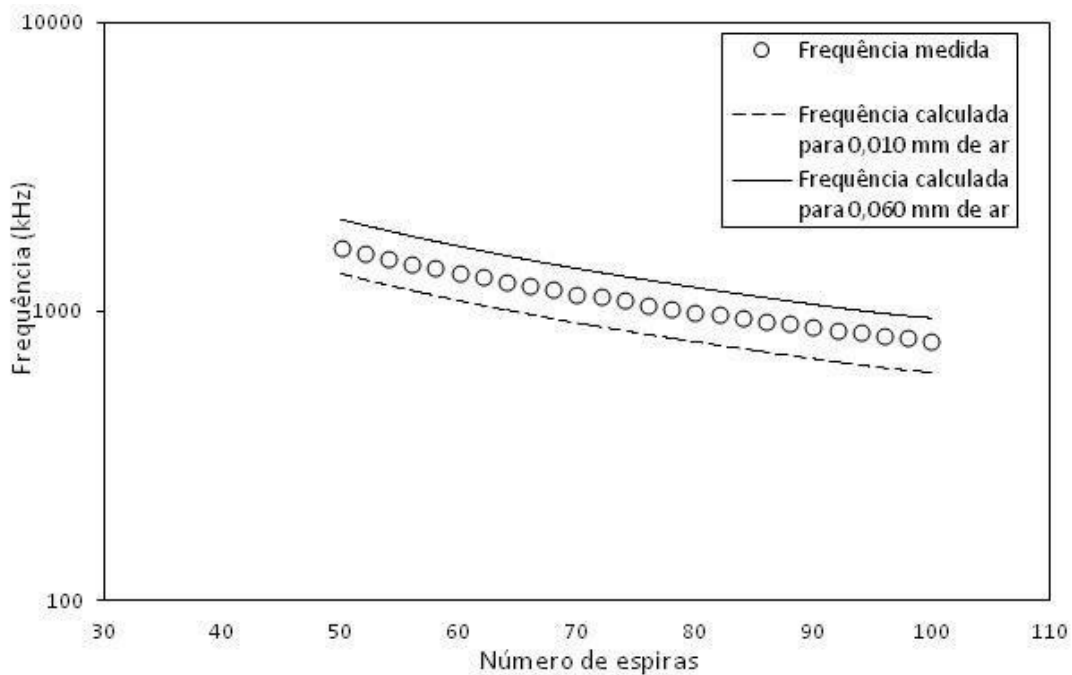
## RESULTADOS

Para efeitos de comparação foi construída uma bobina bifilar com diâmetro de 35,33 mm e fio de 24AWG inicialmente com cem espiras. Foram retiradas de duas em duas voltas até chegar a cinquenta espiras. Foram medidas as frequências de ressonância da mesma em cada ciclo do processo com o auxílio de um analisador de impedância vetorial Agilent HP4294A, estas medidas são representadas através dos pontos da Figura 5.

De maneira análoga, foram calculadas as frequências de ressonância teóricas, utilizando os valores de  $C_{tt}$ , calculado através da equação que assume a existência de um espaço de ar entre espiras de dimensão comparável a espessura da camada de esmalte utilizada no condutor<sup>11</sup>, capacitância total através da equação (11), indutância total<sup>12</sup> e a frequência de ressonância através da equação (27).

Utilizando os valores de 2 a 6 para a permissividade relativa ( $\epsilon_r$ ) dos isolantes usados em fios esmaltados (uma vez que estes valores são utilizados em condutores comerciais) a variação de  $C_{tt}$  foi de 6,13% para esta faixa. Como a  $C_{tt}$  é pouco variável com a permissividade, para os cálculos posteriores de capacitância total e da frequência de ressonância, foi utilizada uma permissividade média de 4,5<sup>13</sup>.

Considerando uma imprecisão no enrolamento da bobina e que existe um espaço de ar entre espiras de no mínimo 10  $\mu\text{m}$  e no máximo 60  $\mu\text{m}$ , foram calculadas as capacitâncias entre espiras ( $C_{tt}$ ) de 15,02 e 6,31 pF para estes espaços, respectivamente, utilizando o método de Grandi *et al.*<sup>11</sup>. Assim utilizando as equações (11) e (27) foram calculadas a capacitância total e a frequência de ressonância para estes extremos, conforme mostram as curvas na Figura 5. Nota-se que os valores medidos têm o mesmo padrão de comportamento e se encontram da faixa considerada para o espaço de ar entre espiras.



**Figura 5.** Gráfico comparativo entre medidas feitas no analisador de impedância e cálculos através da equação elaborada para determinação da frequência de ressonância de uma bobina bifilar.

## DISCUSSÃO

Através deste estudo foi possível equacionar o comportamento da bobina bifilar de acordo com, a distribuição da tensão entre suas espiras, a capacitância parasita total e a sua frequência de autorressonância. Ressalta-se que as equações desenvolvidas, para o aumento na capacitância e para a diminuição na frequência de autorressonância de uma bobina bifilar em relação a uma bobina convencional de mesmas dimensões, dependem apenas do número de espiras  $N$ .

A Figura 5 apresentou um gráfico que relaciona o número de espiras e a frequência de autorressonância de uma bobina bifilar. Considerando que existe uma pequena imprecisão no enrolamento das espiras de tal bobina, considerou-se a existência de uma faixa de ar entre espiras de 0,010 a 0,060 mm, a correlação entre ambas as curvas calculadas para estes extremos e os valores medidos foi de 0,99971. A faixa de ar considerada é coerente, uma vez que a espessura da camada



isolante do fio de cobre utilizado é de 0,010 mm e que a bobina foi construída manualmente.

Deve-se ressaltar que este estudo e os testes realizados, são válidos para uma bobina com núcleo de ar e camada simples.

Esse estudo trouxe o entendimento, equacionamento e um modelo elétrico da bobina bifilar de Tesla de maneira a auxiliar no projeto de bobinas e sensores indutivos. Destaca-se que este tipo de análise da bobina bifilar não se encontra disponível na literatura.

## **CONCLUSÃO**

O equacionamento, o entendimento físico e matemático, assim como um modelo elétrico da bobina bifilar de Tesla foram aqui desenvolvidos. Tais desenvolvimentos podem permitir o projeto de bobinas e de sensores indutivos, incluindo uma compreensão física e matemática das características singulares da bobina bifilar de Tesla.

## **AGRADECIMENTOS**

Os autores agradecem a Capes e ao CNPq pelo apoio financeiro.

## **REFERÊNCIAS**

1. Pichorim SF. Sistemas Biotelemétrico Passivo Utilizando Microunidade Injetável em Tendão para Medição de Força Muscular [tese]. Paraná (PR): CEFETPR; 2003.
2. Collins C. Miniature Passive Pressure Transensor for Implanting in the Eye. *IEEE trans. on biom. eng.* 1967;14:74-83.
3. Maeoka G, Pichorim SF, Abatti PJ. Avaliação do Desempenho de um Sensor Biotelemétrico Passivo para Monitoração da Pressão Arterial Testes Estáticos. *IFMBE Proceedings*, 2007;18:524-527.
4. Baldi A, Choi W, Ziaie B. A Self-Resonant Frequency-Modulated Micromachined Passive Pressure Transensor. *IEEE sensors J.* 2003;3:728-733.
5. <http://ieeeb.okstate.edu/lecturenotes/EET-46540> (acessado em Novembro 2011).

6. Ghovanloo M, Lazzi G. Wiley Encyclopedia of Biomedical Engineering. [S.l.]: Wiley; 2006.
7. Pichorim SF, Destefani F. Estudo de Bobina Bifilar de Tesla como Sensor para Engenharia Biomedica. *CBEB*. 2010;22:359-362.
8. Tumanski S. Induction Coil Sensors a Review. *Meas. Sci. Technol.* 2007;18:31-46.
9. Tesla, N. "Coil for Electro-Magnets (Patent style)," U.S. Patent 512 340, Jan 9, 1894.
10. Massarini A, Kazimierczuk MK. Self-Capacitance of Inductors. *IEEE trans. on power electronics*. 1997;12:671–676.
11. Grandi G, Kazimierczuk MK, Massarini A, Reggiani U. Stray Capacitances of Single-Layer Solenoid Air-Core Inductors. *IEEE trans. on ind. Applications*. 1999;35:1162–1168.
12. Terman FE. Radio Engineers' Handbook. [S.l.]: McGraw-Hill, 1943.
13. Hole MJ, Appel LC. Stray Capacitance of a Two Layer Air-Cored Inductor. *IEEE proc. circuits devices syst.* 2005;152:565-572.

